1.8 质量 0.004kg 子弹以 500ms^{-1} 速度运动，原子中的电子以 1000ms^{-1} 速度运动,试估计它们位置的不确定度，证明子弹有确定的运动轨道，可用经典力学处理，而电子运动需量子力学处理。（速度的不确定度是多少？）

解：

根据测不准关系：$\Delta x\Delta P_x \ge h/4\pi$，或有 $\Delta x\Delta P_x \approx h$，诸粒子坐标的不确定度分别为:

子弹：$\Delta x \approx h/m\Delta v = \dfrac{6.626\times10^{-34}}{0.004\times500} = 3.313\times10^{-34}m$

电子：$\Delta x \approx h/m\Delta v = \dfrac{6.626\times10^{-34}}{9.11\times10^{-31}\times1000} = 7.273\times10^{-7}m$

对于子弹由不确定关系所决定的坐标不确定度远远小于实际测量的精确度（宏观物体精确到 10^{-8}m)，其运动中的波动性可完全忽略，其坐标和动量能同时确定，即可用经典力学处理。

对于电子不确定度所决定的坐标不确定度远远大于原子本身（原子大小数量级一般为几十到几百 pm)。电子运动中的波动性不能被忽略，应该用量子力学进行处理。

1.10 试计算 He 原子室温时的 de Broglie 波长。

考点：粒子的德布洛意波长的计算公式 $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{mv} = \dfrac{h}{\sqrt{2mT}}$ （T 为能量，非温度）

解：$m_{He} = 1.67\times10^{-27}\times4 = 6.68\times10^{-27}$ kg， $k = 1.38\times10^{-23}$ J/K

平均平动动能为 $E = \frac{3}{2}kT$，可直接代入上述公式，得：

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}} = \frac{6.626\times10^{-34}}{\sqrt{3\times6.68\times10^{-27}\times1.38\times10^{-23}\times298.15}} = 7.30\times10^{-11}m$$

1.12 判断下列算符是否是线性厄米算符：（自变量的取值范围应该为：$x\in(-\infty,+\infty)$）

（1）$\dfrac{d}{dx}$ （2）∇^2 （3）$x_1 + x_2$ （4）e^{-x^2}

①一个算符如果满足乘法分配律，则称为线性算符。即：$\hat{R}(\varphi_1+\varphi_2)=\hat{R}\varphi_1+\hat{R}\varphi_2$

$\hat{R}(c\varphi_1)=c\hat{R}\varphi_1$

②$\hat{R}$如果满足下式，则称为自共轭算符，即 $\int \varphi_1^*\hat{R}\varphi_2 d\tau=\int \varphi_2(\hat{R}\varphi_1)^* d\tau$

（$\hat{R}^\dagger_{12}=\hat{R}^*_{21}$--类比于共轭矩阵，$\int \varphi_1^*\hat{R}^\dagger\varphi_2 d\tau=\int (\varphi_2^*\hat{R}\varphi_1)^* d\tau=\int \varphi_2(\hat{R}\varphi_1)^* d\tau$

自共轭算符满足：$\int \varphi_1^*\hat{R}^\dagger\varphi_2 d\tau=\int \varphi_1^*\hat{R}\varphi_2 d\tau$）

（1） i.算符$\frac{d}{dx}$满足$\frac{d}{dx}(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{d}{dx}\varphi_1+\frac{d}{dx}\varphi_2$且$\frac{d}{dx}(c\varphi)=c\frac{d}{dx}\varphi$

故，算符$\frac{d}{dx}$为线性算符。

ii. $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1^*\frac{d}{dx}\varphi_2 dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1^* d\varphi_2=\left[\varphi_1^*\varphi_2\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2 d\varphi_1^*=-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2\frac{d}{dx}\varphi_1^* dx$

（应用了分部积分以及波函数平方可积的性质）

综上，算符$\frac{d}{dx}$为线性算符但非厄米算符。

（2）$\nabla^2=\nabla_x^2+\nabla_y^2+\nabla_z^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

i.算符$\frac{d^2}{dx^2}$满足$\frac{d^2}{dx^2}(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{d^2}{dx^2}\varphi_1+\frac{d^2}{dx^2}\varphi_2$且$\frac{d^2}{dx^2}(c\varphi)=c\frac{d^2}{dx^2}\varphi$

同理$\frac{d^2}{dy^2}$和$\frac{d^2}{dz^2}$也存在上述关系，故算符∇^2为线性算符。

ii.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1^*\frac{d^2}{dx^2}\varphi_2 dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1^* d\varphi_2'=\left[\varphi_1^*\varphi_2'\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_0^{\infty}\varphi_2' d\varphi_1^*=\left[\varphi_1^*\varphi_2'\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2'\frac{d}{dx}\varphi_1^* dx$$

$$=\left[\varphi_1^*\varphi_2'\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}\varphi_1^* d\varphi_2=\left[\varphi_1^*\varphi_2'\right]_{-\infty}^{\infty}-\left[\varphi_1^{*\prime}\varphi_2'\right]_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2 d\varphi_1^{*\prime}=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2\frac{d^2}{dx^2}\varphi_1^* dx$$

（应用了分部积分以及波函数单值、连续、平方可积的性质）

同理$\frac{d^2}{dy^2}$和$\frac{d^2}{dz^2}$也存在上述关系，故算符∇^2为厄米算符。

（$\iiint\varphi_1^*\nabla^2\varphi_2 d\tau=\iiint\varphi_1^*(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})\varphi_2 d\tau=\int_0^{\infty}\varphi_1^*\frac{d^2}{dx^2}\varphi_2 dx+\int_0^{\infty}\varphi_1^*\frac{d^2}{dy^2}\varphi_2 dy+\int_0^{\infty}\varphi_1^*\frac{d^2}{dz^2}\varphi_2 dz$）

综上，算符$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$为线性厄米算符。

（3） x_1+x_2

i. ∵算符(x_1+x_2)满足下面的关系：

$(x_1+x_2)(\varphi_1+\varphi_2)=x_1(\varphi_1+\varphi_2)+x_2(\varphi_1+\varphi_2)=x_1\varphi_1+x_2\varphi_1+x_1\varphi_2+x_2\varphi_2=(x_1+x_2)\varphi_1+(x_1+x_2)\varphi_2$

且$(x_1+x_2)(c\varphi)=x_1c\varphi+x_2c\varphi=cx_1\varphi+cx_2\varphi=c(x_1+x_2)\varphi$

$\therefore$ 算符 (x_1+x_2) 为线性算符。（应用了算子加法的定义以及 x_1 和 x_2 分别为线性算子的性质）

ii. $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1^*(x_1+x_2)\varphi_2 dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1^* x_1\varphi_2 dx+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1^* x_2\varphi_2 dx=\int_{-\infty}^{\infty}x_1^*\varphi_1^*\varphi_2 dx+\int_{-\infty}^{\infty}x_2^*\varphi_1^*\varphi_2 dx$

$=\int_{-\infty}^{\infty}(x_1+x_2)^*\varphi_1^*\varphi_2 dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(x_1+x_2)^*\varphi_1^* dx$

故，算符 (x_1+x_2) 为厄米算符。

综上，算符 (x_1+x_2) 为线性厄米算符

（4） e^{-x^2}

i. $\because$ 算符满足下面的关系：

$e^{-x^2}(\varphi_1+\varphi_2)=e^{-x^2}\varphi_1+e^{-x^2}\varphi_2$ 且 $e^{-x^2}(c\varphi)=ce^{-x^2}\varphi$

$\therefore$ 算符 e^{-x^2} 为线性算符。

ii. $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1^* e^{-x^2}\varphi_2 dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\varphi_1^*\varphi_2 dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(e^{-x^2}\varphi_1)^* dx$

故，算符 e^{-x^2} 为厄米算符。

综上，算符 e^{-x^2} 为线性厄米算符

故，（2）、（3）、（4）均为线性厄米算符。

说明：若(3)中 x_1,x_2 不代表坐标函数，而代表复数向量，则 (x_1+x_2) 为一复数，将不再满足厄米性质！

1.13 下列函数是否是 $\frac{d}{dx}$ 的本征函数？若是，求其本征值：

（1） e^{ikx} （2） $\cos kx$ （3） k （4） kx

(1) $\frac{d}{dx}e^{ikx}=ike^{ikx}$ $\therefore e^{ik\cdot}$ 是算符 $\frac{d}{dx}$ 的本征函数，本征值为 ik

(2) $\frac{d}{dx}\cos kx=-k\sin kx$ $\therefore \cos kx$ 不是算符 $\frac{d}{dx}$ 的本征函数

(3) $\frac{d}{dx}k=0=0\times k$ $\therefore k$ 是算符 $\frac{d}{dx}$ 的本征函数，本征值为 0

(4) $\frac{d}{dx}kx=k$ $\therefore kx$ 不是算符 $\frac{d}{dx}$ 的本征函数