1.11 一个粒子的某状态波函数为$\psi(x)=\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}e^{-ax^2}$，a 为常数，$-\infty\le x\le+\infty$, 证明

$\Delta x\Delta p_x$ 满足测不准关系。

证明：

$$\because\ \left\langle x^2\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)x^2\psi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}e^{-ax^2}x^2\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{2a}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-2ax^2}dx$$

$$=\sqrt{\frac{8a}{\pi}}\int_0^{\infty}ye^{-2ay}d\sqrt{y}=\sqrt{\frac{2a}{\pi}}\int_0^{\infty}y^{\frac{1}{2}}e^{-2ay}dy=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{z}^{\frac{1}{2}}e^{-z}dz=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{4a}$$

$$\left\langle x\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)x\psi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}e^{-ax^2}x\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{2a}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-2ax^2}dx=0$$

$$\left\langle p_x{}^2\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)(-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2})\psi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}e^{-ax^2}(-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2})\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}e^{-ax^2}dx=2a\hbar^2\sqrt{\frac{2a}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\frac{d}{dx}(xe^{-ax^2})dx$$

$$=2a\hbar^2\sqrt{\frac{2a}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\frac{d}{dx}(xe^{-ax^2})dx=2a\hbar^2\sqrt{\frac{2a}{\pi}}(\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-2ax^2}-2ax^2e^{-2ax^2})dx=4a\hbar^2\sqrt{\frac{2a}{\pi}}(\int_0^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-2ay}dy-\int_0^{\infty}2ay\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-2ay}dy$$

$$=2a\hbar^2\sqrt{\frac{1}{\pi}}\Gamma(\frac{1}{2})-2a\hbar^2\sqrt{\frac{1}{\pi}}\Gamma(\frac{3}{2})=a\hbar^2$$

$$\left\langle p_x\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)(-i\hbar\frac{d}{dx})\psi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}e^{-ax^2}(-i\hbar\frac{d}{dx})\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}e^{-ax^2}dx=2ia\hbar^2\sqrt{\frac{2a}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-2ax^2}dx=0$$

$$\because\ \Delta x=\sqrt{\left\langle x^2\right\rangle-\left\langle x\right\rangle^2}=\sqrt{\frac{1}{4a}}$$

$$\Delta p_x=\sqrt{\left\langle p_x{}^2\right\rangle-\left\langle p_x\right\rangle^2}=\sqrt{a}\hbar$$

$$\therefore\qquad \Delta x\Delta p_x=\sqrt{\frac{1}{4a}}\times\sqrt{a}\hbar=\frac{\hbar}{2}$$

故 $\Delta x\Delta p_x$ 满足测不准关系。

1.24 已知一维势箱粒子的归一化波函数为

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\qquad \text{n=1, 2, 3…}\quad \text{(其中 } l \text{ 为势箱长度)}$$

计算 (1)粒子的能量 (2)坐标的平均值 (3)动量的平均值

解：

(1) 回顾一维势箱粒子的归一化波函数的推导：

Schrödinger 方程 $H\psi=E\psi$

$$H=T+V=\frac{P^2}{2m}=\frac{(-i\hbar\frac{d}{dx})^2}{2m}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

故有： $$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{8\pi^2mE}{h^2}\psi=0$$

解得波函数的通解为：

$$\psi=c_1\cos\sqrt{\frac{8\pi^2mE}{h^2}}x+c_2\sin\sqrt{\frac{8\pi^2mE}{h^2}}x$$

再考虑边界条件，得到一维势箱粒子的归一化波函数： $\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}$ n=1, 2, 3…

对比通解 ψ 与 $\psi_n(x)$ 得到： $\frac{8\pi^2mE}{h^2}=\frac{n^2\pi^2}{l^2}$ 故有 $E=\frac{n^2h^2}{8ml^2}$

对于此题，已知波函数，直接利用 $H\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d\psi}{dx^2}=E\psi$ 即可求出能量 E 。

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d\psi}{dx^2}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx^2}(\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l})=\frac{h^2}{8m\pi^2}\times(\frac{n\pi}{l})^2\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{n^2h^2}{8ml^2}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\therefore\ E=\frac{n^2h^2}{8ml^2}$$

（2）坐标的平均值

$$\langle x\rangle=\int\psi_n^*(x)\hat{x}\psi_n(x)dx=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l x\frac{1-\cos\frac{2n\pi x}{l}}{2}dx$$

$$=\frac{2}{l}\times\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^l-\frac{2}{l}\times(\frac{l}{2n\pi})^2\int_0^{2n\pi}y\cos ydy=\frac{l}{2}-\frac{l}{2n^2\pi^2}\{[y\sin y]_0^{2n\pi}-[-\cos y]_0^{2n\pi}\}=\frac{l}{2}$$

(3) 动量的平均值

$$\langle p_x\rangle=\int\psi_n^*(x)\hat{p}_x\psi_n(x)dx=\frac{2}{l}\int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}(-i\hbar\frac{d}{dx})\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=-\frac{i\hbar}{l}\times\frac{n\pi}{l}\int_0^l\sin\frac{2n\pi x}{l}dx=-\frac{i\hbar}{2l}[-\cos y]_0^{2n\pi}=0$$